

Séminaire De Révision fin de Semestre

Quentin Gallien

quentin.gallien@epfl.ch

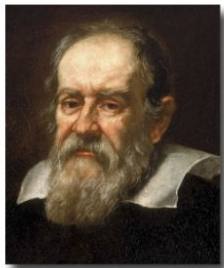
MA 3-4 Astrophysique

Assistant pour S.Bréchet depuis 4 ans

Chapitre 1: Etudier la mécanique

Galileo Galilei

1564 – 1642



- 1 **Expérience** : interroger la nature (méthodologie scientifique)
- 2 **Théorie** : langage mathématique

Johannes Kepler

1571 – 1630

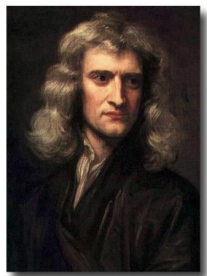


Mécanique céleste : 3 lois

- 1 **Loi des orbites** : ellipse, soleil = foyer
- 2 **Loi des aires** : aire/temps = constante
- 3 **Loi des périodes** : période²/demi grand-axe³ = constante

Sir Isaac Newton

1643 – 1727



Mécanique classique : céleste et terrestre

- 1 **Théorie physique** : Lois de la mécanique (3 lois)
- 2 **Théorie mathématique** : Calcul différentiel et intégral

Chapitre 1: Etudier la mécanique

1 **Vitesse** : dérivée de la position $x(t)$ par rapport au temps t :

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad dx = v dt$$

• **Approximation** $\Delta x \ll x$:

$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

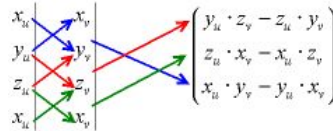
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

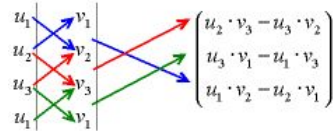
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_3$$

2 **Accélération** : dérivée de la vitesse $v(t)$ par rapport au temps t :

$$a(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

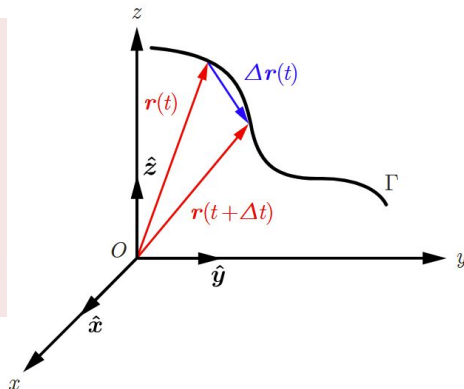
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad dv = a dt$$


$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v \\ z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v \\ x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v \end{pmatrix}$$

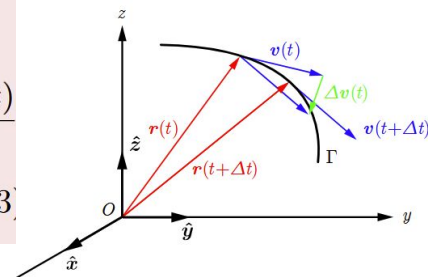

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2: Cinématique et dynamique du point matériel

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
 &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \\
 &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$



$$x(t) = vt + x_0$$

$$v(t) = at + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Grandeur extensive : grandeur physique qui, pour un ensemble d'objets, est égale à sa somme pour chaque objet.

Grandeur intensive : grandeur physique qui est indépendante du nombre d'objets.

Principe d'inertie de Galilée : Etant écartés tous les obstacles extérieurs, un corps pesant sera indifféremment au repos ou en mouvement et il se conservera dans l'état où il sera placé : au repos, il restera au repos, en mouvement, il restera en mouvement.

Si on touche pas, ça bouge (change) pas

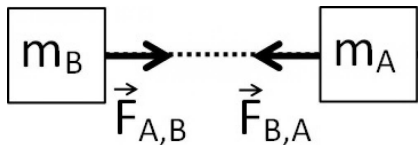
Chapitre 2: Cinématique et dynamique du point matériel

1^{ere} loi de Newton : MRU = pas de force

Tout corps persévère dans l'état de mouvement uniforme en ligne droite à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.

Inertie : résistance à la variation de l'état de mouvement naturel

3^e loi de Newton :



2^e loi de Newton : $\sum F^{\text{ext}} = \dot{p}$

Les changements de mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font selon la ligne droite dans laquelle cette force est imprimée à l'objet.

$$p = m v$$

$$\sum F^{\text{ext}} = m a \quad \text{si} \quad m = \text{cste}$$

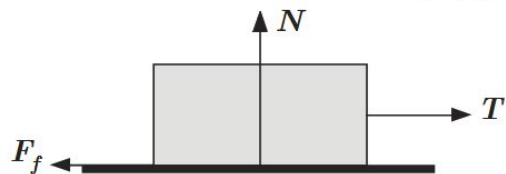
<<Il fallait être Newton pour apercevoir que la lune tombe, quand tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas.>>



Paul Valéry

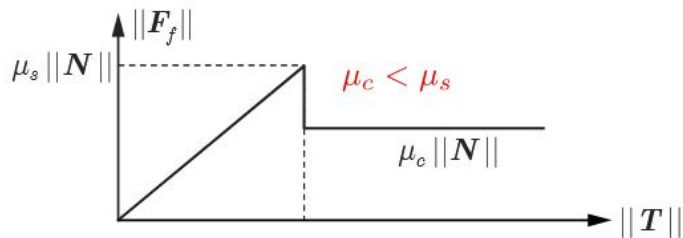
Chapitre 3: Frottements et balistique

Force de frottement statique : $\|\mathbf{F}_f\| = \|\mathbf{T}\|$



$$\|\mathbf{F}_f\| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\|$$

$$\mathbf{F}_f = -\mu_c \|\mathbf{N}\| \hat{\mathbf{v}} \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$



Force de frottement visqueux : force de frottement d'un solide en mouvement relatif par rapport à un fluide.

Régime laminaire : Loi de Stokes
à faible vitesse

$$\mathbf{F}_f = -k \eta \mathbf{v} = -b \mathbf{v}$$

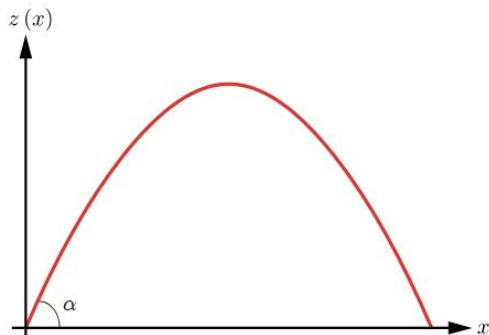
Régime turbulent : Traînée
à vitesse élevée

$$\mathbf{F}_f = -\frac{1}{2} C_x A \rho v^2 \hat{\mathbf{v}}$$

Chapitre 3: Frottements et balistique

Equation du mouvement balistique vertical :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0$$



Equations horaires :

① $x(t) = v_0 \cos \alpha t$

② $y(t) = 0$

③ $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$



$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$

Loi du mouvement balistique avec frottement visqueux :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_f = m \mathbf{a}$$

Avec frottement, on rajoute juste une force

$$m\dot{v}_x = -bv_x \longrightarrow \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_x$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x(t)} \frac{dv'_x(t')}{v'_x(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \quad v_x(t) = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

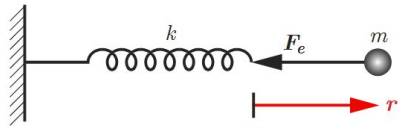
Temps d'amortissement et viscosité :

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{m}{k\eta} = \text{cste}$$

Chapitre 4: Oscillateur harmonique et mouvement circulaire

Loi de Hooke :

$$F_e = -k d$$



$$m \ddot{x} = -k x$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Période :

$$\omega T = 2\pi \quad \text{ainsi} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Fréquence :

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ainsi} \quad \omega = 2\pi f$$

Force élastique

$$F_e = -k r$$

Pulsation:

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

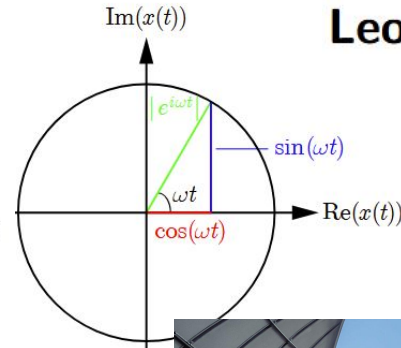
$$\ddot{x} = \sqrt{-\omega^2} \dot{x} = -\omega^2 x$$

Formule d'Euler : solutions graphiques

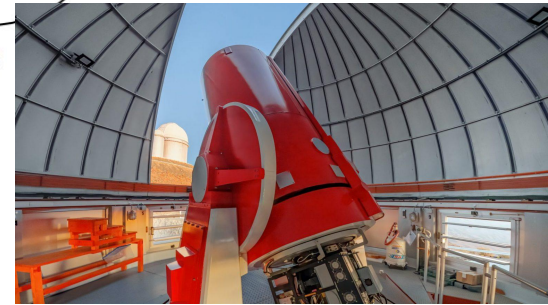
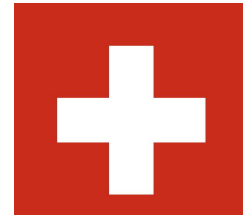
$$x(t) = e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

$$x(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$x(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$



Leonhard Euler



Solution physique générale :

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi')$$

Chapitre 4: Oscillateur harmonique et mouvement circulaire

Oscillateur harmonique amorti

$$m \mathbf{a} = -b \mathbf{v} - k \mathbf{r}$$

① Amortissement faible : $\|F_f\| \lesssim \|F_e\|$

② Amortissement critique : $\|F_f\| \sim \|F_e\|$

③ Amortissement fort : $\|F_f\| \gtrsim \|F_e\|$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma \equiv \frac{b}{2m} > 0 \quad \text{ainsi} \quad \gamma = \frac{1}{2\tau}$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

$$x(t) \equiv e^{\lambda t} = e^{(\text{Re}(\lambda) + i \text{Im}(\lambda))t} = e^{\text{Re}(\lambda)t} e^{i \text{Im}(\lambda)t}$$

① Mouvement amorti : $e^{\text{Re}(\lambda)t}$

② Mouvement oscillatoire : $e^{i \text{Im}(\lambda)t}$

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2) = 0 \quad \text{ainsi} \quad \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Solution mathématique générale complexe :

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{où} \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$$

① Amortissement faible : $\gamma < \omega_0$

② Amortissement critique : $\gamma = \omega_0$

③ Amortissement fort : $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

Chapitre 4: Oscillateur harmonique et mouvement circulaire

- ❶ **Amortissement faible** : (4.55)

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

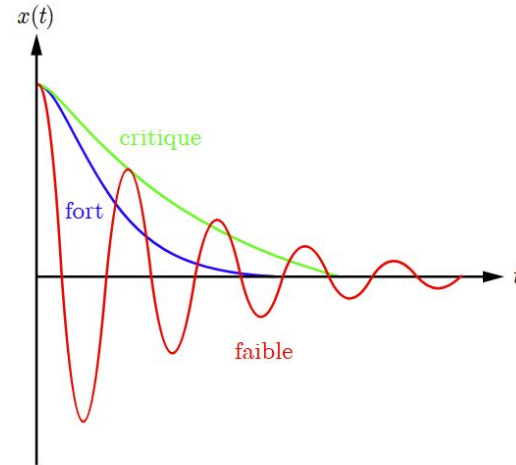
- ❷ **Amortissement fort** : (4.59)

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

- ❸ **Amortissement critique** : (4.61)

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$$

- ❶ **Amortissement faible** : l'amplitude d'oscillation est exponentiellement amortie durant les oscillations.
- ❷ **Amortissement fort** : l'amplitude est exponentiellement amortie avant qu'il y ait oscillation.
- ❸ **Amortissement critique** : l'amplitude est exponentiellement amortie juste avant qu'il y ait oscillation.



Chapitre 4: Oscillateur harmonique et mouvement circulaire

Mouvement circulaire et vitesse angulaire

Mouvement circulaire uniforme (MCU) : trajectoire circulaire de rayon constant à vitesse scalaire constante.

$$s(t) = R\phi(t) \quad \text{où} \quad R = \text{cste} \quad \omega = \dot{\phi} = \text{cste} \quad v = R\omega$$

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0 \quad s(t) = R\phi(t) = R\omega t + R\phi_0 = vt + s_0$$

Vecteur accélération : $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} - R\omega^2 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

$$\text{MCU: } a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)$$

- 1 **Position** : $x(t) = R \cos(\omega t)$ et $y(t) = R \sin(\omega t)$
- 2 **Vitesse** : $\dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t)$ et $\dot{y}(t) = R\omega \cos(\omega t)$
- 3 **Accélération** : $\ddot{x}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t)$ et $\ddot{y}(t) = -R\omega^2 \sin(\omega t)$



<https://www.youtube.com/watch?v=f7Moj3Kn420>

Chapitre 5: Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations

• Repère cylindrique : $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ repère mobile

• Repère orthonormé :

$$\textcircled{1} \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\textcircled{2} \hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0$$

• Repère direct :

$$\textcircled{1} \hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$$

$$\textcircled{2} \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$$

$$\textcircled{3} \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$$

• Changement de base :

$$\textcircled{1} \hat{\rho} = \cos \phi \hat{x}_1 + \sin \phi \hat{x}_2$$

$$\textcircled{2} \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2$$

$$\textcircled{3} \hat{z} = \hat{x}_3$$

• Dérivées des vecteurs de base :

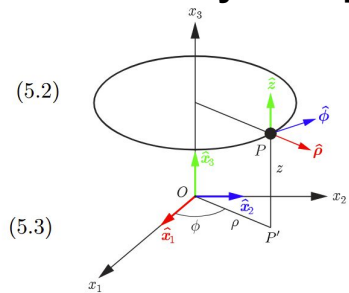
$$\textcircled{1} \dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi} (-\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2) = \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\textcircled{2} \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi} (\cos \phi \hat{x}_1 + \sin \phi \hat{x}_2) = -\dot{\phi} \hat{\rho}$$

$$\textcircled{3} \dot{\hat{z}} = 0$$

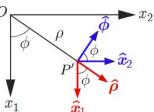
$$\mathbf{v} = \underbrace{\dot{\rho} \hat{\rho}}_{\text{radiale}} + \underbrace{\rho \dot{\phi} \hat{\phi}}_{\text{tangentielle}} + \underbrace{\dot{z} \hat{z}}_{\text{verticale}}$$

Cylindrique



$$(5.2)$$

$$(5.3)$$



$$\textcircled{1} x_1 = r \sin \theta \cos \phi$$

$$\textcircled{2} x_2 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$\textcircled{3} x_3 = r \cos \theta$$

• Dérivées des vecteurs de base :

$$\textcircled{1} \dot{\hat{r}} = \dot{\theta} (\cos \theta \cos \phi \hat{x}_1 + \cos \theta \sin \phi \hat{x}_2 - \sin \theta \hat{x}_3)$$

$$+ \dot{\phi} \sin \theta (-\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2) = \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\textcircled{2} \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} (\sin \theta \cos \phi \hat{x}_1 + \sin \theta \sin \phi \hat{x}_2 + \cos \theta \hat{x}_3)$$

$$+ \dot{\phi} \cos \theta (-\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2) = -\dot{\theta} \hat{r} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{\phi}$$

$$\mathbf{v} = \underbrace{\dot{r} \hat{r}}_{\text{radiale}} + \underbrace{r \dot{\theta} \hat{\theta}}_{\text{nodale}} + \underbrace{r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}}_{\text{azimutale}}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \dot{\hat{\rho}} + (\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\phi}$$

$$+ \rho \dot{\phi} \dot{\hat{\phi}} + \dot{z} \hat{z} + \dot{z} \dot{\hat{z}}$$

$$\mathbf{a} = \left(\underbrace{\ddot{\rho}}_{\text{radiale}} \underbrace{-\rho \dot{\phi}^2}_{\text{centripète}} \right) \hat{\rho} + \left(\underbrace{\rho \ddot{\phi}}_{\text{tangentielle}} + \underbrace{2\dot{\rho} \dot{\phi}}_{\text{de Coriolis}} \right) \hat{\phi} + \underbrace{\ddot{z} \hat{z}}_{\text{verticale}}$$

Sphérique

• Repère sphérique : $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ repère mobile

• Repère orthonormé :

$$\textcircled{1} \hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 1$$

$$\textcircled{2} \hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{r} = 0$$

$$(5.12)$$

• Repère direct :

$$\textcircled{1} \hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$$

$$\textcircled{2} \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$$

$$\textcircled{3} \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$$

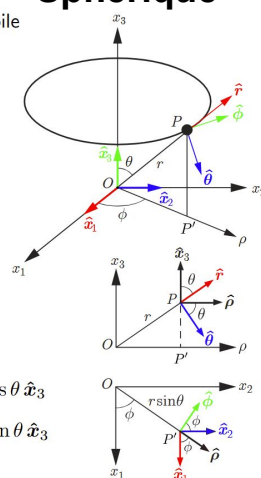
• Changement de base : (5.14)

$$\textcircled{1} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x}_1 + \sin \theta \sin \phi \hat{x}_2 + \cos \theta \hat{x}_3$$

$$\textcircled{2} \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x}_1 + \cos \theta \sin \phi \hat{x}_2 - \sin \theta \hat{x}_3$$

$$\textcircled{3} \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2$$

$$\mathbf{a} = \left(\underbrace{\ddot{r}}_{\text{radiale}} \underbrace{-r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta}_{\text{centripète}} \right) \hat{r} + \left(\underbrace{r \ddot{\theta}}_{\text{nodale}} + \underbrace{2\dot{r} \dot{\theta}}_{\text{de Coriolis}} \underbrace{-r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta}_{\text{centripète}} \right) \hat{\theta} + \left(\underbrace{r \ddot{\phi} \sin \theta}_{\text{azimutale}} + \underbrace{2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta}_{\text{de Coriolis}} \right) \hat{\phi}$$



$$(5.13)$$

Chapitre 6: Contraintes, puissance, travail et énergie cinétique

Bille dans un anneau et pendule mathématique ça me casse les couilles de les traiter, c'est des applications de cours, je vous laisse faire seuls.

Travail, énergie cinétique et puissance

Loi du mouvement : multipliée par dt

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \quad \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \\ = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Travail infinitésimal : $\delta W(\mathbf{F})$ d'une force \mathbf{F} est une grandeur extensive obtenue par produit scalaire de la force \mathbf{F} et du déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$.

$$\delta W(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ = \|\mathbf{F}\| \|d\mathbf{r}\| \cos \theta$$

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}) = \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \delta W(\mathbf{F}) = \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Energie cinétique infinitésimale : grandeur scalaire et extensive associée à tout mouvement de vitesse \mathbf{v} d'un point matériel de masse m .

$$dT = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{v} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

$$T = \int_0^T dT' = m \int_0^v \mathbf{v}' \cdot d\mathbf{v}' = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{\text{ext}}) = \Delta T_{1 \rightarrow 2}$$

Puissance : grandeur scalaire et extensive associée à la capacité d'une force \mathbf{F} d'accélérer (ou de freiner) un mouvement de vitesse \mathbf{v}

Travail et puissance : le travail est l'intégrale temporelle de la puissance

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}) = \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad (6.62)$$

Chapitre 7: Energie potentielle, énergie mécanique et résonance

Force conservative : une force \mathbf{F}_c est dite conservative si le travail $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c)$ effectué par cette force est indépendant du chemin suivi $\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}$ et dépend uniquement de la position initiale \mathbf{r}_1 et de la position finale \mathbf{r}_2 .

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right) - \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right)$$

Energie potentielle : grandeur scalaire et extensive $V(\mathbf{r})$ définie comme le travail à effectuer en s'opposant à la force conservative \mathbf{F}_c pour déplacer le point matériel de \mathbf{r}_0 à \mathbf{r} ,

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}'$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \Delta V_{1 \rightarrow 2}$$

Théorème d'existence de l'énergie potentielle : la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une énergie potentielle $V(\mathbf{r})$ associée à une force \mathbf{F} , c'est-à-dire pour que la force \mathbf{F} soit conservative, est que le travail effectué par la force $W_c(\mathbf{F})$ sur tout chemin fermé \mathcal{C} soit nul,

$$W_c(\mathbf{F}) = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_c$$

Energie potentielle totale : (7.8)

$$V = \sum V(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) \quad \text{où} \quad V(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}'$$

Energie mécanique : grandeur scalaire et extensive E qui est la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle totale V

$$E = T + V$$

Théorème de conservation de l'énergie : si toutes les forces extérieures agissant sur un point matériel sont des forces conservatives $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$, alors l'énergie mécanique E est conservée, ce qui implique que l'énergie mécanique E_1 au temps t_1 est égale à l'énergie mécanique E_2 au temps t_2 et que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique \dot{E} est nulle

$$E_1 = E_2 = E = \text{cste} \quad \forall t_1, t_2 \quad \text{ainsi} \quad \dot{E} = 0 \quad (7.13)$$

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

Puissance dissipée :

$$P = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad P = \frac{dE}{dt} = \dot{E}$$

$$\mathbf{F}_c^{\text{ext}} = - \frac{dV}{d\mathbf{r}} = - \nabla V$$

$$V_e(x) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} k d \cdot d\mathbf{r}' = k \int_{\ell_0}^x (x' - \ell_0) dx' = \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2$$

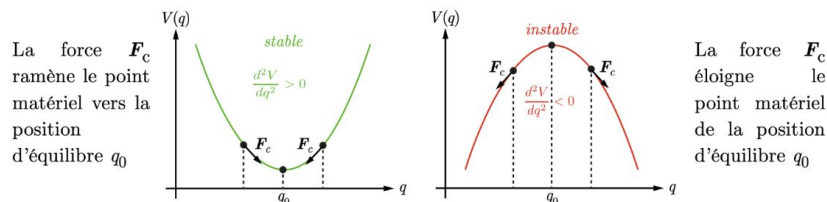
Chapitre 7: Energie potentielle, énergie mécanique et résonance

Equilibre et stabilité

Force conservative :

$$\mathbf{F}_c = -\nabla V = -\frac{dV}{dq} \hat{q}$$

Au voisinage de la position d'équilibre $q = q_0$, l'énergie potentielle $V(q)$ est une fonction parabolique de la coordonnée généralisée q .



1 Position d'équilibre stable : $\left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} > 0$

2 Position d'équilibre instable : $\left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} < 0$



Résonance

Ondes stationnaires : lors de la résonance acoustique, des ondes stationnaires se forment dans le trombone. La fréquence de résonance la plus basse s'appelle la fréquence fondamentale et les fréquences plus élevées qui sont des multiples de la fréquence fondamentale s'appellent des harmoniques.

Fréquence de résonance :

$$\lambda = 2L, \text{ où } L = x \text{ m} \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$$

Equation du mouvement : oscillatoire harmonique amorti avec terme d'excitation périodique dans le membre de droite

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t) \quad (7.6)$$

Rapport des amplitudes : fonction lorentzienne

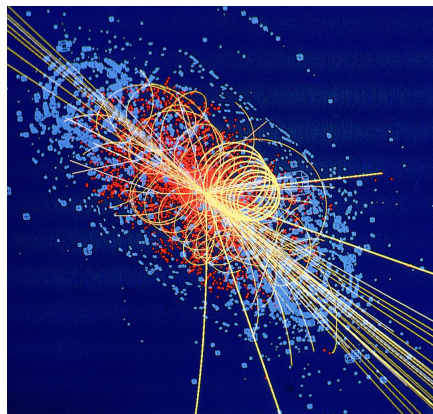
$$\frac{\rho(\omega)}{\rho(0)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}}$$

Chapitre 8: Loi d'action-réaction, collisions

3^e loi de Newton : Principia Mathematica

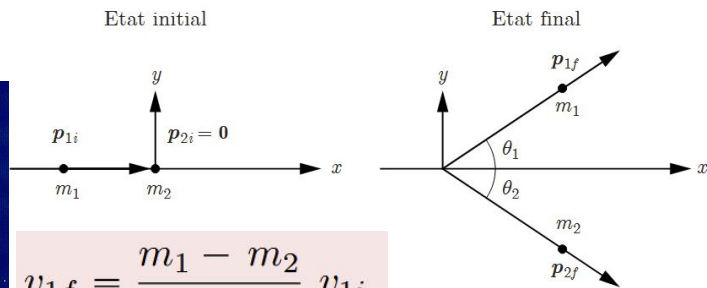
L'action est toujours égale à la réaction ;
c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur
l'autre sont toujours égales et de sens contraire.

$F^{1 \rightarrow 2} + F^{2 \rightarrow 1} = 0$ Taper ça fait mal



1 Conservation de la quantité de mouvement

$$p = p_1 + p_2 = \text{cste}$$



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$\Delta T_{i \rightarrow f} = T_f - T_i = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 < 0$$

1 **Collision élastique** : l'énergie cinétique totale T est conservée lors du choc.

2 **Collision inélastique** : l'énergie cinétique totale T n'est pas conservée lors du choc.

Chapitre 8: Loi d'action-réaction, collisions

Vecteur position du centre de masse : système

$$\mathbf{R}_G = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2 \quad \text{où} \quad M = m_1 + m_2$$

Vecteur position relative

$$\mathbf{R}_G = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2$$

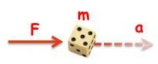
$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

Lois de Newton

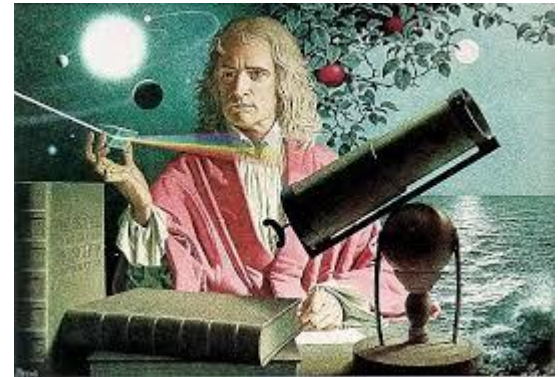
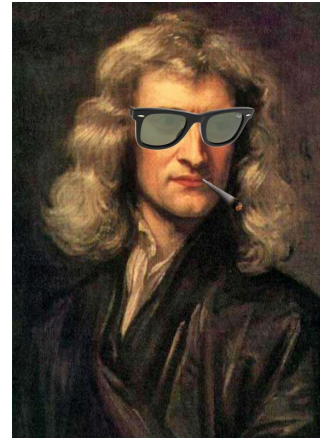
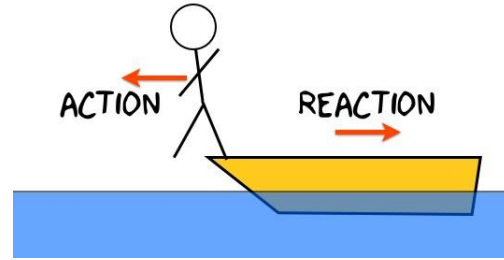
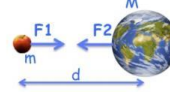
Première loi
Inertie



Deuxième loi
Force = masse x accélération

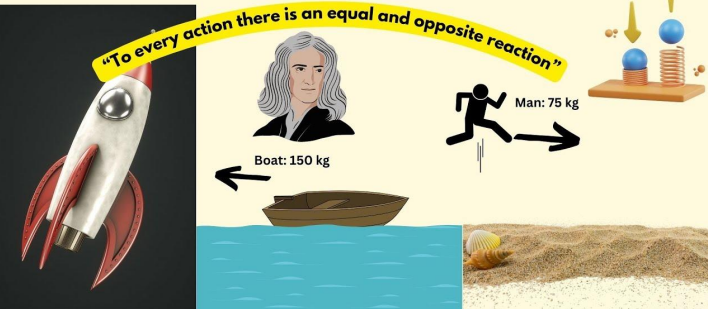


Troisième loi
 $F_1 = F_2 = m \cdot M \cdot G / d^2$



Newton's Third Law of Motion

"To every action there is an equal and opposite reaction"



Chapitre 9: Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

Moment cinétique : grandeur vectorielle extensive et axiale L_O , définie par rapport à un point O , associée au mouvement de rotation plan d'un point matériel P autour de O .

$$L_O = OP \times p = r \times p \quad (9.1)$$

Le moment cinétique L_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs r et p selon la règle de la main droite.

Moment cinétique = quantité de rotation

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O$$

Moment de force : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force F sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$M_O = OP \times F = r \times F \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs r et F selon la règle de la main droite.

Moment de force = force pour mettre en rotation

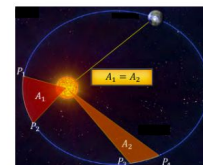
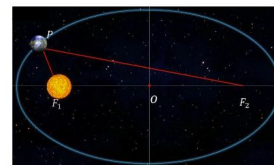
Mouvement circulaire uniforme

$$L_O = I_O \omega \quad \text{où} \quad \omega = \text{cste} \quad \text{et} \quad I_O = \text{cste} > 0$$

$$I = \int_{\text{Volume}} R^2 dm = \int_{\text{Volume}} \rho(\vec{r}) R^2 dV$$

• **Lois de Kepler** : mécanique céleste

- 1 **Loi des orbites** : l'orbite des planètes est une ellipse dont le soleil est le foyer.
- 2 **Loi des aires** : l'aire balayée par le vecteur position, centré sur le soleil, par unité de temps est constante.
- 3 **Loi des périodes** : le rapport de la période orbitale au carré sur le demi-grand axe de l'ellipse au cube est constant.



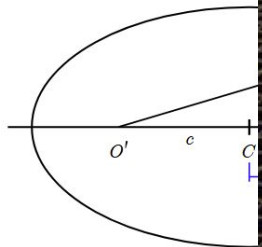
Chapitre 9: Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$M_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O = m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{r} + 2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^3 (1 - e^2)^3}{4\pi^2 m^2 a^3}$$

Ellipse : coordonnée

$$\rho (a + c \cos \phi) =$$

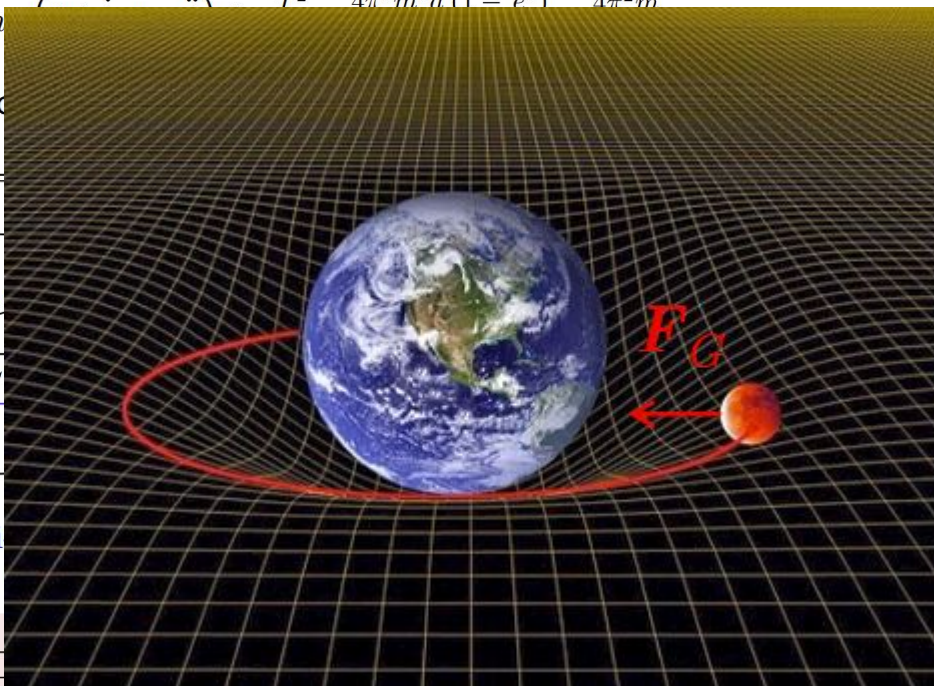


$a =$ demi

Coordonnée

$$\rho(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

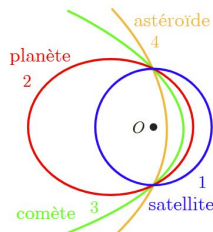
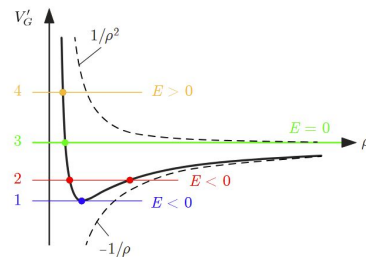
3^e loi de Kepler :



Orbites : points d'intersection V'_G et $E = \text{cste}$: extremum de ρ (9.65)

$E = V'_G$ ainsi $T' = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = 0$ et $\dot{\rho} = 0$ alors ρ_{\min} ou ρ_{\max}

- Circulaire ($e = 0$) : $E < 0$ et $\rho_{\min} = \rho = \rho_{\max}$
- Elliptique ($0 < e < 1$) : $E < 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$
- Parabolique ($e = 1$) : $E = 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho$
- Hyperbolique ($e > 1$) : $E > 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho$



Loi de la gravitation universelle : l'**orbite elliptique** de la lune n'est pas sa trajectoire naturelle (droite) dans un espace-temps plat : la cause du mouvement est la force de la gravitation F_G .

Théorie de la relativité générale : l'**orbite elliptique** de la lune est son mouvement naturel dans un espace-temps courbé par la terre : la notion de force est remplacée par celle de courbure de l'espace-temps.

Chapitre 10: Système de masse variable et référentiels accélérés

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \neq 0 \quad m(t + dt) = m(t) + dm$$

$$\mathbf{p}(t + dt) = \underbrace{(m(t) + dm)(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v})}_{\text{fusée}} + \underbrace{(-dm)(\mathbf{v}(t) + \mathbf{u})}_{\text{gaz}}$$

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u}$$

$$m(t) \frac{dz}{dt} = -m(t)g - \frac{dm(t)}{dt} u$$

$$\int_0^{v_z(t)} dz(t') = -g \int_0^t dt' - u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm'(t')}{m'(t')}$$

$$v_z(t) = -gt - u \ln \left(\frac{m(t)}{m(0)} \right)$$

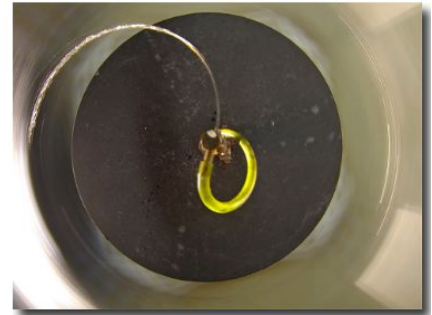
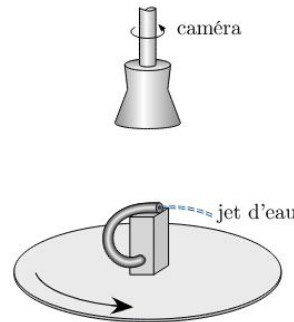


Temps d'ascension : temps t_m

$$t_m = -\frac{u}{g} \ln \left(\frac{m(t_m)}{m(0)} \right)$$

Référentiel d'inertie : référentiel où le principe d'inertie est vérifié : en absence de force extérieure résultante, le mouvement d'un point matériel est un mouvement rectiligne uniforme. Les référentiels d'inertie se déplacent à vitesse constante les uns par rapport aux autres. Donc l'accélération d'un point matériel est la même dans tous ces référentiels.

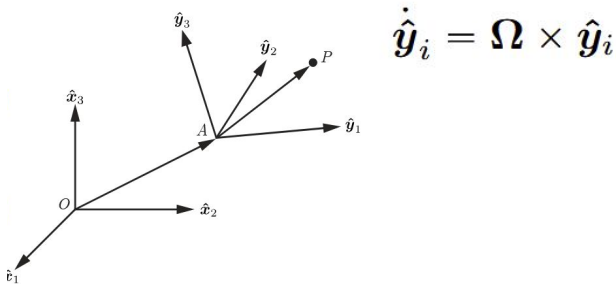
Référentiel accéléré : référentiel où le principe d'inertie n'est pas vérifié : en absence de force extérieure résultante, le mouvement d'un point matériel n'est pas un mouvement rectiligne uniforme en raison de forces d'inertie. Ces forces sont les causes de l'accélération non-nulle d'un référentiel accéléré par rapport à un référentiel d'inertie quelconque.



Chapitre 10: Système de masse variable et référentiels accélérés

$$\mathbf{r}_a(P) = \mathbf{r}_a(A) + \mathbf{r}_r(P)$$

Repères : le repère absolu ($\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$) est immobile et le repère relatif ($\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$) a un mouvement de translation et de rotation à vitesse angulaire Ω par rapport au repère absolu (cas général).



$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(P) + \Omega \times \mathbf{r}_r(P)$$

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_r(P)) + 2\Omega \times \mathbf{v}_r(P) + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)$$

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \mathbf{a}_c(P) + \mathbf{a}_C(P) + \mathbf{a}_E(P)$$

1 Accélération centripète :

$$\mathbf{a}_c(P) = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_r(P))$$

2 Accélération de Coriolis :

$$\mathbf{a}_C(P) = 2\Omega \times \mathbf{v}_r(P)$$

3 Accélération d'Euler :

$$\mathbf{a}_E(P) = \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)$$

1 Force inertielle :

$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A)$$

2 Force centrifuge :

$$\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c(P) = -m \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_r(P))$$

3 Force de Coriolis :

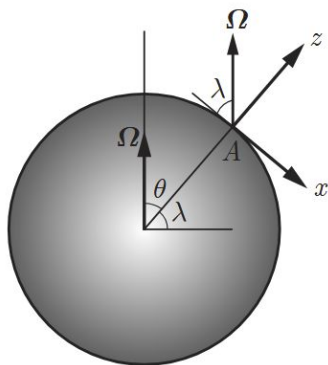
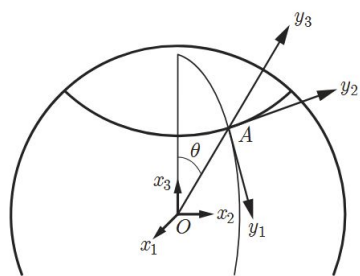
$$\mathbf{F}_C = -m \mathbf{a}_C(P) = -2m \Omega \times \mathbf{v}_r(P)$$

4 Force d'Euler :

$$\mathbf{F}_E = -m \mathbf{a}_E(P) = -m \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)$$

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = m \mathbf{a}_r(P)$$

Chapitre 11: Dynamique terrestre, pendule de Foucault et système de points matériels



Le point A se situe au niveau de la mer sous le point P et entre les points O et P .

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$g' = g - \Omega \times (\Omega \times OA)$$

Pendule de Foucault

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P)$$

$$T = m \left(g + \underbrace{\ell \dot{\theta}^2}_{\text{centrifuge}} + \underbrace{2\ell \dot{\theta} \Omega \cos \lambda \cos \phi}_{\text{Coriolis}} \right)$$

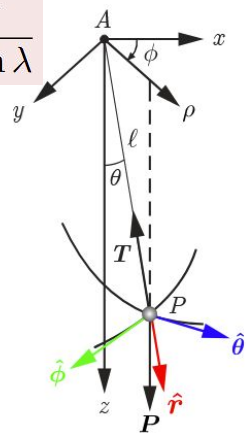
$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad \mathbf{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}$$

$$\mathbf{O}G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{O}P_{\alpha}$$

$$\mathbf{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad \mathbf{A}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}$$



$$T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda}$$



Chapitre 12: Cinématique et dynamique du solide indéformable

Solide indéformable : système fermé constitué d'un ensemble de points matériels dont les distances relatives sont constantes. Il ne change ni de volume, ni de forme, mais uniquement d'orientation spatiale.

- 1 **Point matériel** : mouvement de rotation du centre de masse
- 2 **Solide indéformable** : mouvements de rotation du centre de masse et de rotation propre autour du centre de masse.

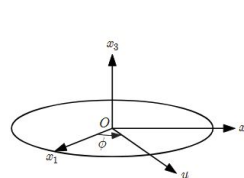
Théorème d'orientation : 6 coordonnées sont nécessaires pour orienter un solide indéformable quelconque par rapport à un référentiel donné.

Position : 3 coordonnées cartésiennes

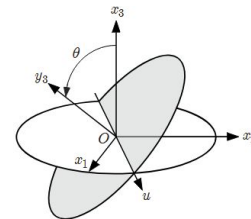
Orientation : 3 angles (Euler)

- 1 **Point A** : 3 coordonnées cartésiennes (x, y, z)
- 2 **Point B** : 2 angles (θ, ϕ) sur une sphère de rayon r centrée en A .
- 3 **Point C** : 1 angle ψ sur le cercle obtenu par intersection de deux sphères de rayon r centrées en A et B .
- 4 **Point D** : entièrement déterminé par l'intersection de trois sphères de rayon r centrées en A , B et C et par l'orientation du tétraèdre (règle de la main droite).

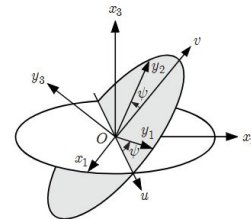
- 1 La **précession** de vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope autour de l'axe de symétrie vertical.
- 2 La **nutation** de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope dans un plan vertical radial.
- 3 La **rotation propre** de vitesse angulaire $\dot{\psi}$ est le mouvement de rotation du disque de couleur autour de l'axe du gyroscope.



- 1 **Précession** :
Rotation d'angle ϕ
autour de l'axe
vertical Ox_3 :
 $Ox_1 \rightarrow Ou$



- 2 **Nutation** :
Rotation d'angle θ
autour de l'axe nodal
 Ou :
 $Ox_3 \rightarrow Oy_3$



- 3 **Rotation propre** :
Rotation d'angle ψ
autour de l'axe de
rotation propre Oy_3 :
 $Ou \rightarrow Oy_1$

Chapitre 12: Cinématique et dynamique du solide indéformable

$$\Omega = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi} = \dot{\phi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{u} + \dot{\psi} \hat{y}_3$$

Solide indéformable : étant donné qu'un solide indéformable est un système fermé de points matériels dont les distances relatives sont fixes, les théorèmes du centre de masse et du moment cinétique sont les mêmes que pour un système fermé de points matériels.

Théorème du centre de masse : solide indéformable

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} = M \mathbf{A}_G \quad \text{car} \quad \mathbf{P} = M \mathbf{V}_G \quad \text{et} \quad M = \text{cste} \quad (12.15)$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OP} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_P = \mathbf{R}_P \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_P$$

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{PG} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G$$

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{OP} \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} = \sum \mathbf{R}_P \times \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}}$$

$$\sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_P + \mathbf{V}_P \times M \mathbf{V}_G$$

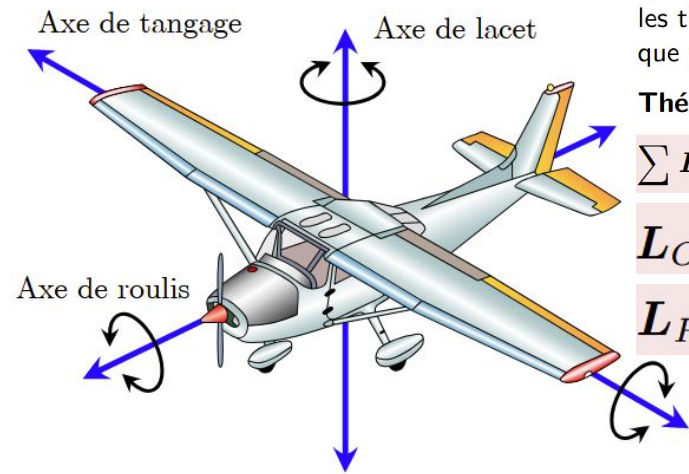
Relation entre les vitesses : points P et Q quelconques du solide

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}_P + \Omega \times \mathbf{PQ}$$

Relation entre les accélérations : points P et Q quelconques du solide

$$\mathbf{A}_Q = \mathbf{A}_P + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{PQ}) + \dot{\Omega} \times \mathbf{PQ} \quad (12.11)$$

Moment cinétique : $\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \Omega$



Chapitre 12: Cinématique et dynamique du solide indéformable

Tenseur d'inertie : application linéaire évaluée en G

$$I_G = \sum m_\alpha (GP_\alpha^2 \mathbb{1} - GP_\alpha \otimes GP_\alpha)$$

1 **Application linéaire** : $GP_\alpha^2 \mathbb{1}$ représentée par la matrice 3×3 diagonale de composantes $\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij}$ dans la base $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

2 **Application linéaire** : $GP_\alpha \otimes GP_\alpha$ représentée par la matrice 3×3 symétrique de composantes $GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j}$ dans la base $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

$$L_{G,i} = \sum_{j=1}^3 I_{G,ij} \Omega_j \quad I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_\alpha \left(\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right)$$

1 $I_{G,11} = \sum_{\alpha} m_\alpha (GP_{\alpha,2}^2 + GP_{\alpha,3}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_\alpha r_{\alpha,23}^2$

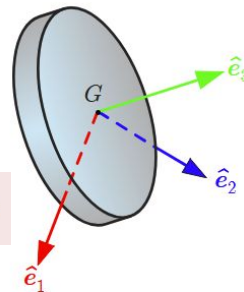
2 $I_{G,22} = \sum_{\alpha} m_\alpha (GP_{\alpha,3}^2 + GP_{\alpha,1}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_\alpha r_{\alpha,31}^2$

3 $I_{G,33} = \sum_{\alpha} m_\alpha (GP_{\alpha,1}^2 + GP_{\alpha,2}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_\alpha r_{\alpha,12}^2$

Moment cinétique : repère d'inertie

$$\begin{pmatrix} L_{G,1} \\ L_{G,2} \\ L_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{G,1} = \sum_{\alpha} m_\alpha r_{\alpha,1}^2 \quad I_{G,2} = \sum_{\alpha} m_\alpha r_{\alpha,2}^2 \quad I_{G,3} = \sum_{\alpha} m_\alpha r_{\alpha,3}^2$$



$$\dot{L}_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \dot{\hat{e}}_i$$

$$\dot{L}_G = \Omega \times L_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \Omega \times \left(\sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i \right)$$

1 selon \hat{e}_1 : $\sum F_1^{\text{ext}} = M \dot{V}_{G,1}$
 2 selon \hat{e}_2 : $\sum F_2^{\text{ext}} = M \dot{V}_{G,2}$
 3 selon \hat{e}_3 : $\sum F_3^{\text{ext}} = M \dot{V}_{G,3}$

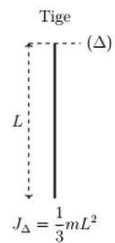
1 selon \hat{e}_1 : $\sum M_{G,1}^{\text{ext}} = I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2$

2 selon \hat{e}_2 : $\sum M_{G,2}^{\text{ext}} = I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3$

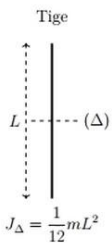
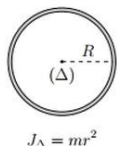
3 selon \hat{e}_3 : $\sum M_{G,3}^{\text{ext}} = I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1$

Chapitre 13: Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

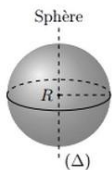
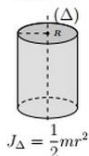
$$I_{G,i} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,i}^2 \longrightarrow I_{G,i} = \int_V dm r^2$$



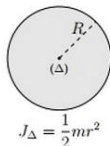
Anneau



Cylindre



Disque



- **Théorème de transfert du moment cinétique** : (12.17) évalué en $O \equiv A$

$$L_A = \mathbf{AG} \times M \mathbf{V}_G + L_G \quad (13.18)$$

- **Mouvement circulaire** : G autour de A

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AG} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_A = \mathbf{0} \quad (13.19)$$

- **Moment cinétique** : (13.19) dans (13.18)

$$L_A = M \mathbf{AG} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AG}) + L_G \quad (13.20)$$

- **Identité vectorielle** : (1.44) dans (13.20)

$$L_A = M \left(\mathbf{AG}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{AG} \right) + L_G$$

- **Identités géométriques** :

$$\mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{AG}^2 = d^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 M V_{G,j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j^2$$

$$\dot{T} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{V}_G + \dot{\mathbf{L}}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

$$\dot{T} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{V}_G + \sum M_G^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

- 1 **Premier terme** : puissance due à l'action des forces extérieures \mathbf{F}^{ext} sur le mouvement du centre de masse du solide indéformable caractérisé par la vitesse \mathbf{V}_G .

- 2 **Deuxième terme** : puissance due à l'action des moments de forces extérieures M_G^{ext} sur le mouvement de rotation propre du solide indéformable autour du centre de masse caractérisé par la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$.

Chapitre 13: Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

L'angle θ est constant.

1 selon \hat{e}_1 : $\Omega_1 = \Omega \sin \theta \sin(\Omega t)$

2 selon \hat{e}_2 : $\Omega_2 = \Omega \sin \theta \cos(\Omega t)$

3 selon \hat{e}_3 : $\Omega_3 = \Omega \cos \theta$

1 selon \hat{e}_1 : $\dot{\Omega}_1 = \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t)$

2 selon \hat{e}_2 : $\dot{\Omega}_2 = -\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t)$

3 selon \hat{e}_3 : $\dot{\Omega}_3 = 0$

• Equations d'Euler : générales

1 selon \hat{e}_1 : $\sum M_{G,1}^{\text{ext}} = I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2$

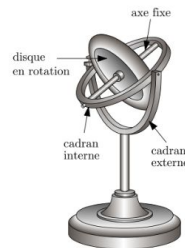
2 selon \hat{e}_2 : $\sum M_{G,2}^{\text{ext}} = I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3$

3 selon \hat{e}_3 : $\sum M_{G,3}^{\text{ext}} = I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1$

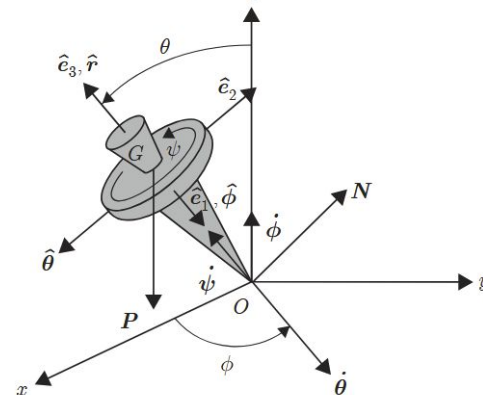
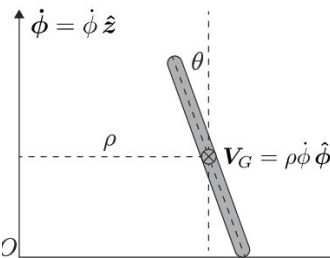
$$\sum M_G^{\text{ext}} = \left(I_{G,\perp} + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \cos \theta \right) \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t) \hat{e}_1$$

$$- \left(I_{G,\perp} + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \cos \theta \right) \Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t) \hat{e}_2$$

Gyroscope : roue ou disque en rotation dont l'axe de rotation se maintient dans une orientation donnée par rapport à un référentiel d'inertie. Lorsque la roue est en rotation, l'orientation de l'axe n'est pas modifiée par la rotation des cadrans interne ou externe.



$$M_O^{\text{ext}} = R_G \times P = \dot{L}_O = \frac{L_O}{t + a}$$



Chapitre Sup: Conseils pour l'examen, la physique étou étou

Note pour moi même dans le futur:

Improvise



**Merci et bonne chance
pour l'examen et les
révisions!!!!!!**